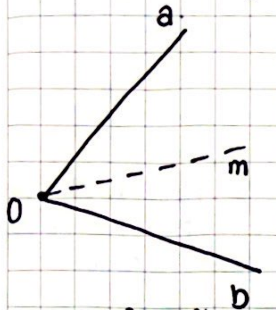
MATHEMATICS : GÓC LƯỢNG GIÁC

I. Khái niệm góc lượng giác

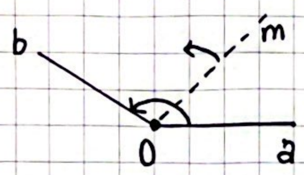
- Là góc đc tạo nên từ 2 tia đầu và tia cuối.

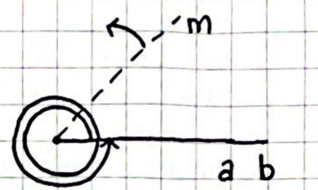


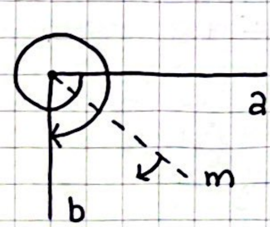
- Tia đầu là tia Oa, Tia cuối là tia Ob
- Tia quay Om: quét một góc từ tia OA qua tia Ob thì góc đó là góc lượng giác.
- Ký hiệu góc lượng giác : (Oa ; Ob)
- Số đo (Oa ; Ob) : α
- Quay ngược chiều kim đồng hồ = (+)
  cùng chiều kim đồng hồ = (−)

- Biểu diễn góc lượng giác
  - Góc 150°:
  - Góc 720°
  - Góc −450°

sđ (Oa; Ob) = −450°

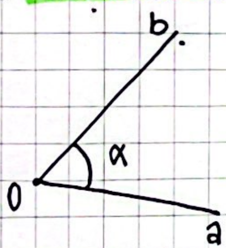






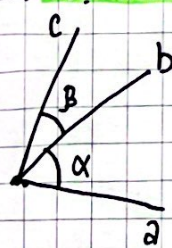
sđ (Oa; Ob) = 150°   sđ (Oa ; Ob) = 720°

- Nhận xét tổng quát:



- Số đo (Oa, Ob) = $\alpha + 360°.k \ (k \in \mathbb{Z})$
- k = số vòng quay
- $k \in \mathbb{Z}$.
- Áp dụng cho (Oa ; Ob) bất kỳ.

II. Hệ thức Chasles (Sa - lơ)



- sđ (Oa ; $\underline{Ob}$) + sđ ($\underline{Ob}$; Oc) = sđ (Oa ; Oc) + 360°.k
- $k \in \mathbb{Z}$
- Hệ thức vô tri

- Ví dụ mẫu : Cho góc lượng giác (Ox, Ou) = 240° ; (Ox ; Ov) = −270°
  Yêu cầu tính số đo góc lượng giác (Ou ; Ov) $(k \in \mathbb{Z})$

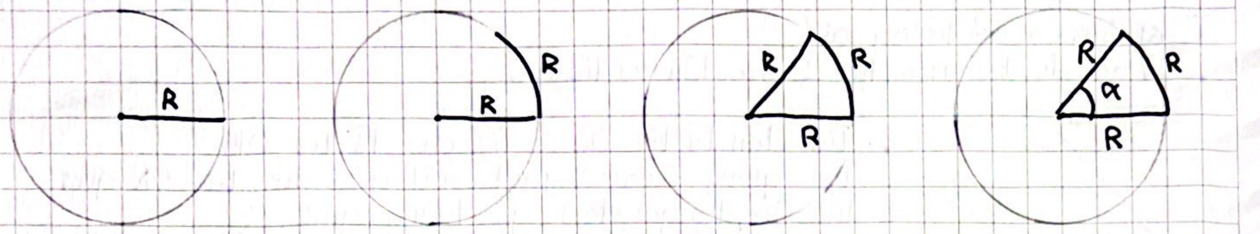
  . Theo hệ thức Chasles : sđ (Ox, Ou) + sđ (Ou ; Ov) = sđ (Ox, Ov) + 360°k

$$\Rightarrow sđ(Ou;Ov) = sđ(Ox,Ov) - sđ(Ox,Ou)$$
$$= (-270) - 240°$$
$$= -510° + 360°.k$$
$$= -150 + (k-1).360°$$
$$= -150 + n.360° \quad (n = k-1)$$

KLONG

III. Đơn vị đo và radian (rad)

- là một đơn vị để đo góc (như độ)
- bản chất của 1 radian:



- Ta có bán kính R trên hình tròn giả định
- Từ bán kính R, ta có một cung có độ dài = R
- Ta nối lại thành một hình quạt có mọi số đo = R
- Ng ta qui ước góc trên = 1 rad
  α = 1 rad.

- Đổi từ radian sang độ / độ sang radian
  - 1 vòng tròn 360° = 6,28 radian
    = 2π radian
    $\}$ $180^\circ = \pi$ radian

- Đổi sang radian nhanh:
  - lấy độ $\div 180 + \pi$

  Ví dụ: $600^\circ \to$ rad?
  $= 600/180\pi$
  $= \frac{10}{3}\pi$

- Đổi sang độ nhanh
  lấy rad $\cdot 180$ bỏ π

  Ví dụ: $\frac{32\pi}{3} = 1920^\circ$

  Nếu 0 có $\pi \to$ chia π.

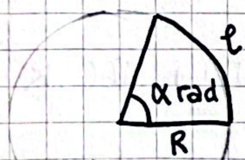
- Sử dụng máy tính cầm tay đổi nhanh:

  SHIFT + MODE + 2 + 2

  Nhập số liệu độ: VD: $37^\circ 45' 30''$
  $= 37^\circ 45^\circ 30^\circ$

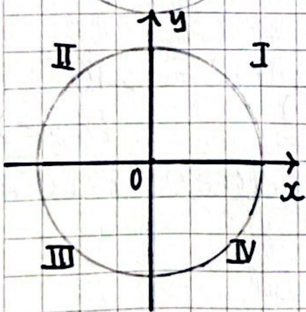
  Nhấn OPTN + 2 + 1 + =

IV. Độ dài cung tròn



- Độ dài cung tròn l với bán kính R và góc α rad
  $= R \cdot \alpha$
- 1 hình tròn / đg tròn $= 2\pi$.

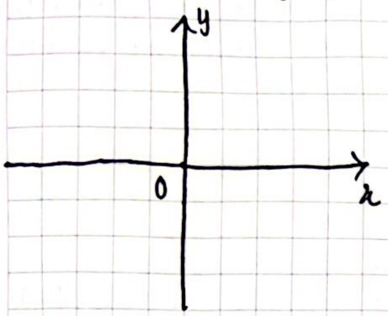
V. Đường tròn lượng giác:



- Đường tròn lượng giác luôn có bán kính = 1.
- Đường tròn lượng giác Tâm O, gốc tọa độ.
- Đường tròn được định hướng.
- Lấy điểm A(1; 0) làm gốc.
- Chia làm 4 phần: I; II; III; IV.
- Gọi là góc phần tư thứ x.

MATHEMATICS : GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

I. Giá trị lượng giác



- $\sin \alpha^\circ = \frac{MH}{MO} = \frac{MH}{1} = MH$ hay OK (y_0)
- $\cos \alpha^\circ = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} = OH$ hay KM (x_0)
- tính sin/cos 1 góc = cách chiếu lên trục tung, hoành
- đối với $\tan \alpha^\circ = \frac{\sin\alpha^\circ}{\cos\alpha^\circ} = \frac{y_0}{x_0}$
- đối với $\cot \alpha^\circ$

II. Giá trị lượng giác của các góc liên quan đặc biệt

- góc đối (α và $-\alpha$)

$\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$
$\cos\alpha = \cos(-\alpha)$
$\tan\alpha = -\tan(-\alpha)$
$\cot\alpha = -\cot(-\alpha)$

- góc bù (α và $180^\circ - \alpha$)

$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$
$\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$
$\tan\alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$
$\cot\alpha = -\cot(180^\circ - \alpha)$

- góc phụ (α và $90^\circ - \alpha$)

$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$
$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$
$\tan\alpha = \cot(90^\circ - \alpha)$
$\cot\alpha = \tan(90^\circ - \alpha)$

- góc hơn kém 180° (α° và $180^\circ + \alpha$)

$\sin\alpha = -\sin(180^\circ + \alpha)$
$\cos\alpha = -\cos(180^\circ + \alpha)$
$\tan\alpha = \tan(180^\circ + \alpha)$
$\cot\alpha = \cot(180^\circ + \alpha)$

III. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác

- Công thức lượng giác cơ bản.

① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ② $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2}$ ③ $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2}$

④ $\tan x \cdot \cot x = 1$.

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\tan\alpha}$
- $\tan\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$.
- $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$. $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

KI.ONG

- 4 nhóm công thức lượng giác :
  - Công thức cộng :

$$\sin(a \pm b) = \sin a.\cos b \pm \sin b.\cos a$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a.\cos b \mp \sin a.\sin b$$
$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a.\tan b}$$

+) Sin thì sin cos cos sin
Cos thì cos cos sin sin
tan tổng thì lấy tổng tan
chia một nhân với tích tan
có liền .

Nhớ : $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$

- Công thức nhân đôi

$$\sin 2a = \sin(a+a) = \sin a\cos a + \cos a\sin a = 2\sin\cos$$
$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a.\cos a - \sin a\sin a = \cos^2 a - \sin^2 a \quad (1)$$
$$= (1-\sin^2 a) - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a \quad (2)$$
$$= \cos^2 a - (1-\cos^2 a) = 2\cos^2 - 1 \quad (3)$$

- Công thức hạ bậc :

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \qquad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}.$$

$$\tan 2a = \tan(a+a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a.\tan a} = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

- Công thức tích thành tổng :

$$\cos a.\cos b = 1/2\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a.\sin b = 1/2\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$\sin a.\cos b = 1/2\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

cos cos , nửa cos +, +
cốt trừ
sin sin, nửa cos −, −
cos cộng
sin cos, nửa sin +, +
sin trừ .

- Công thức tổng thành tích :

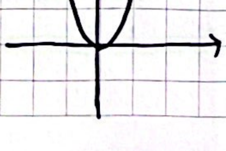
$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin$$
$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin 2.$$

2 cos / −2 sin / 2 sin / 2 cos $\left[\frac{a+b}{2}\right]$ cos / sin / ~~sin~~ cos / sin $\left[\frac{a-b}{2}\right]$

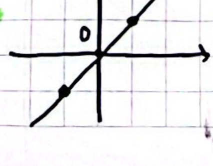
MATHEMATICS : HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ :

I. Hàm số chẵn, hàm số lẻ và hàm số tuần hoàn.
- Hàm số chẵn, hàm số lẻ : có tính đối xứng.
- Bước 1 : Tìm tập xác định đối xứng : $\begin{cases} x \in D \\ -x \in D \end{cases}$ VD : $\mathbb{R}; (-3;3); (-5;5)$
- Bước 2 : Xác định $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ hàm chẵn (đối xứng qua Oy)
  $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ hàm lẻ (đối xứng qua gốc O)

VD : đối xứng qua Oy :



VD : đối xứng gốc O



. Hàm số tuần hoàn: Cho $y = f(x)$ có tập xác định D, $x \in D$ nếu tồn tại $T \neq 0$ thoả mãn

Sin / Cos: góc 2π

Tan / cot: góc π.

$\left.\begin{array}{l} x+T;\ x-T \in D \\ f(x+T) = f(x) \end{array}\right\}$ $y = f(x)$ tuần hoàn.

(*) T dương, nhỏ nhất > chu kỳ hàm số.

Ví dụ: +) $\left.\begin{array}{l} \sin(x + 2\pi) = \sin x \\ \cos(x + 2\pi) = \cos x \end{array}\right\}$ $T = 2\pi$ là chu kỳ của $y = \sin x, \cos x$

$\left.\begin{array}{l} \tan(x + \pi) = \tan x \\ \cot(x + \pi) = \cot x \end{array}\right\}$ $T = \pi$ là chu kỳ của $y = \tan x, \cot x$.

(+) Chú ý: $\left.\begin{array}{l} y = \sin ax \\ y = \cos ax \end{array}\right\} \Rightarrow$ chu kỳ $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$

$\left.\begin{array}{l} y = \tan ax \\ y = \cot ax \end{array}\right\} \Rightarrow$ chu kỳ $T = \dfrac{\pi}{|a|}$

(+) Trong bài toán tìm chu kỳ, nếu > 2 hàm → tìm bội chung nhỏ nhất.

III. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số lượng giác.

. Hàm số $y = \sin x$

. tập xác định: $D = R$

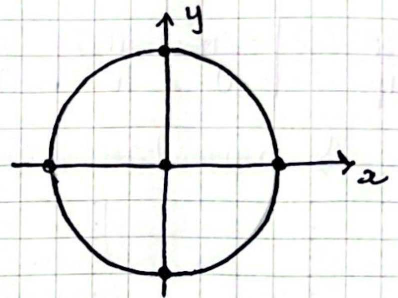
. tập giá trị: $-1 < y < 1$ $(T = [-1; 1])$

. tính chẵn lẻ: hàm số lẻ

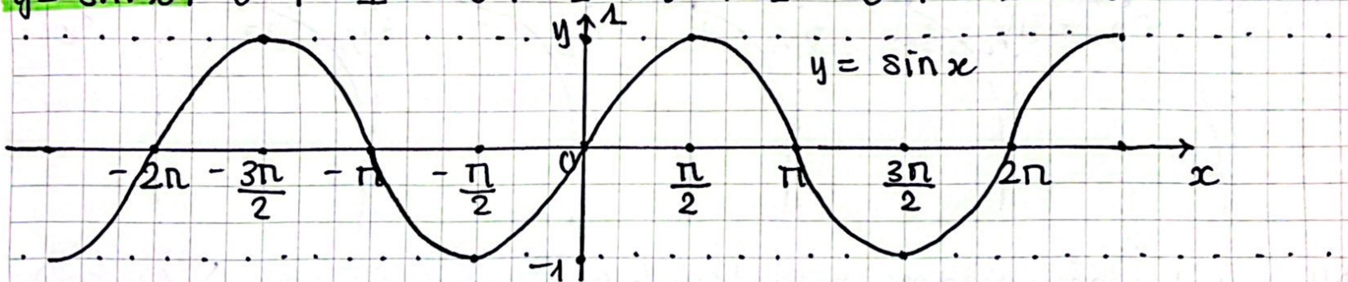
. Chu kỳ: $T = 2\pi$

. Đồ thị:

. Sự biến thiên:



x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = \sin x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0



Nhận xét: hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$

hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$

$\sin x = 0$ khi $x = k\pi, k \in Z$.

$\sin x \neq 0$ khi $x \neq k\pi, k \in Z$

. Hàm số $y = \cos x$

. tập xác định: $D = R$

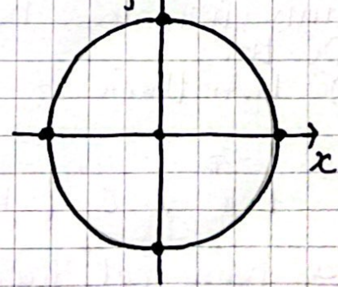
. tập giá trị: $T = [-1; 1]$

. tính chẵn lẻ: hàm số chẵn

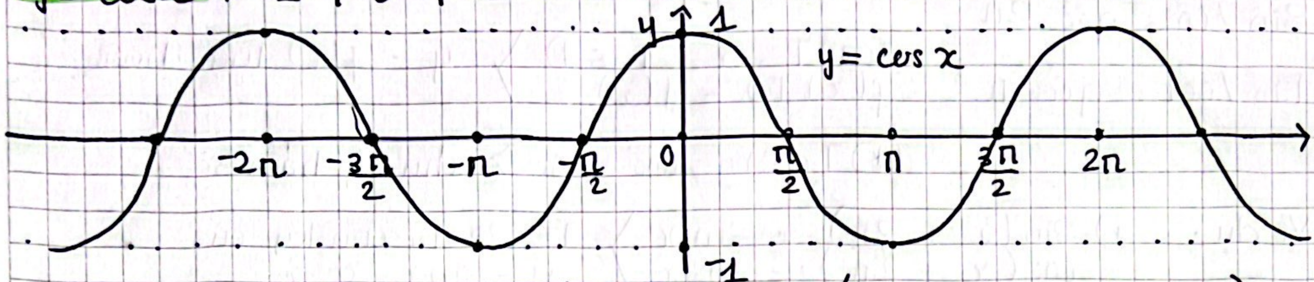
. Chu kỳ: $T = 2\pi$

. Đồ thị:

. Sự biến thiên



x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y=\cos x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

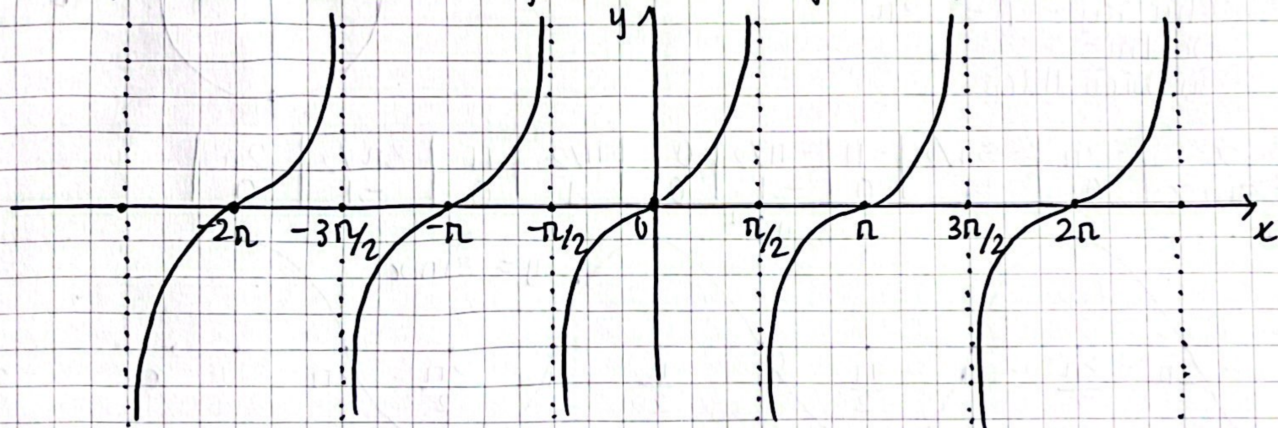


Nhận xét: hàm số đồng biến trên khoảng $(-\pi+k2\pi ; 0+k2\pi)$
hàm số nghịch biến trên khoảng $(0+k2\pi ; \pi+k2\pi)$
$\cos x = 0$ khi $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $\cos x \neq 0$ khi $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$.

. Hàm số $y=\tan x$ $(\sin x/\cos x)$
. tập xác định: $\cos x \neq 0$ hay $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in Z)$ / $D=R$
. tập giá trị: R $(T=R)$. $(-\infty ; +\infty)$
. Tính chẵn lẻ: hàm số lẻ → đối xứng qua gốc O.
. Chu kì: $T=\pi$.
. Đồ thị:
. Sự biến thiên:

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y	0	ll	0	ll	0	ll	0	ll	0

⇒ hàm tan luôn đồng biến trên từng khoảng xác định

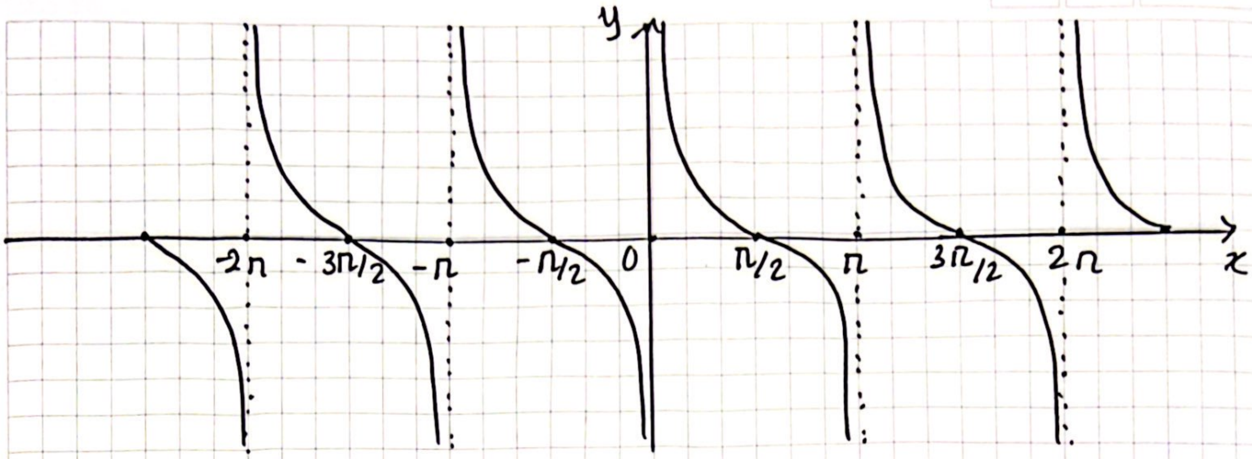


Nhận xét: hàm số đồng biến trên $\left(\frac{-\pi}{2}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in Z)$

. Hàm số $y=\cot x$ $(\cos/\sin)$
. Tập xác định: $\sin x \neq 0$ → $x \neq k\pi$; $D=R\setminus\{k\pi, k\in Z\}$
. tập giá trị: $T=R$ $(-\infty, +\infty)$
. Chu kỳ: $T=\pi$.
. Tính chẵn lẻ: hàm số lẻ
. Đồ thị:
. Độ biến thiên

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y	ll	0	ll	0	ll	0	ll	0	ll

⇒ hàm cot luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định



Nhận xét: hàm số nghịch biến trên khoảng $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$